

Multi-valued Morse homotopy for the SYZ mirror of the complex projective plane

千葉大学大学院 融合理工学府 数学情報科学専攻
中西隼斗 (Hayato NAKANISHI) *

概要

複素射影平面を複素多様体として考えた場合のホモロジー的ミラー対称性を SYZ 構成とモースホモトピーを用いて考える。SYZ 構成のもとでは、正則直線束はミラー側のトーラス束のラグランジュ切断に対応することが知られており、正則ベクトル束はラグランジュ多重切断に対応すると期待されている。本講演では、Oh-Suen(2024) により構成されたラグランジュ多重切断を用いてモースホモトピーの圏を拡張を行う。

1 導入

ミラー対称性とは、ミラー対と呼ばれるシンプレクティック多様体 X と複素多様体 \check{X} の組 (X, \check{X}) に対して、 X のシンプレクティック幾何学的な量と \check{X} の複素幾何学的な量が等価であるというものである。ミラー対称性の圏論的な定式化が Kontsevich によって予想されたホモロジー的ミラー対称性である [Kon95]。これは、ミラー対 (X, \check{X}) に対して、 X のラグランジュ部分多様体からなる導来深谷圏と \check{X} の連接層の導来圏の間に三角圏として同値

$$D^b(Fuk(X)) \simeq D^b(Coh(\check{X}))$$

が存在するという予想である。ミラー対称性の別の定式化として、Strominger-Yau-Zaslow によって提案された SYZ 予想である [SYZ96]。これは、ミラー対 (X, \check{X}) に対してある共通の底空間 B が存在して X と \check{X} が B 上のトーラスファイブレーションと双対トーラスファイブレーションによって実現される:

$$\begin{array}{ccc} X & & \check{X}, \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

という予想である (以下 SYZ 構成)。SYZ 構成において、 $X \rightarrow B$ のラグランジュ切断と \check{X} 上の正則直線束が自然に対応することが知られている [LYZ00, Cha09]。より一般には \check{X} 上の正則ベクトル束と $X \rightarrow B$ のラグランジュ多重切断が対応するとされており、Oh-Suen はトーリック曲面上のトーリックベクトル束に対してそのミラーとなるラグランジュ多重切断を構成した [OS24]。

* E-mail:hayato_nakanishi@chiba-u.jp

一方、リーマン多様体 B 上の余接束 T^*B のラグランジュ切断からなる深谷圏 $Fuk(T^*B)$ は B 上のモースホモトピーの圏 $Mo(B)$ と A_∞ 擬同値となることが Fukaya-Oh によって証明されている [FO97]。この結果をもとに、Kontsevich-Soibelman は SYZ 構成における底空間 B 上のモースホモトピーの圏 $Mo(B)$ を用いてホモロジー的ミラー対称性を示す枠組みを提案した [KS01]。特に、トーリック多様体に対してはモーメント写像と呼ばれるトーラスファイブレーションが存在し、自然に SYZ 構成を応用することができる。[FK21, Nak24a, Nak24b] ではトーリック多様体を複素多様体とした場合のホモロジー的ミラー対称性を SYZ 構成とモースホモトピーの圏を用いて肯定的に議論されている。

本講演では、トーリック曲面を複素多様体として SYZ 構成を考え、Oh-Suen によって構成されたラグランジュ多重切断を用いたモースホモトピーの圏の拡張を提案する。特に、複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ の正則接束 $T_{\mathbb{C}P^2}$ の大域切断がミラー側の拡張されたモースホモトピーの圏 $Mo^{\text{mult}}(P)$ でどのように記述されるかを紹介する。

2 SYZ 構成とラグランジュ多重切断

本節では、複素射影平面に対する SYZ 構成とラグランジュ多重切断について復習する。以降 $N \cong \mathbb{Z}^2$, $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M := \text{Hom}_Z(N, \mathbb{Z})$, $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とする。

2.1 SYZ 構成

複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ の開被覆 $\{U_i\}_i$ を次のように取る。

$$U_i = \{[t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid t_i \neq 0\}.$$

U_0 での複素座標を $(u, v) := \left(\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}\right)$ とし、以降はこの複素座標を用いることにする。 U_0 において、Fubini-Study 形式 ω_{FS} は次のように表される。

$$\omega_{FS} = \frac{1}{2} \bar{\partial} \partial \log(1 + u\bar{u} + v\bar{v}).$$

このとき、実トーラス T^2 が

$$(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}) \cdot [t_0 : t_1 : t_2] := [t_0 : e^{\sqrt{-1}\theta_1} t_1 : e^{\sqrt{-1}\theta_2} t_2]$$

により作用し、これに対応してモーメント写像 $\check{\mu} : \mathbb{C}P^2 \rightarrow M_{\mathbb{R}}$ が

$$\check{\mu}([t_0 : t_1 : t_2]) = \left(\frac{|t_1|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2}, \frac{|t_2|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2} \right).$$

で与えられる。モーメント写像の像 $P := \check{\mu}(\mathbb{C}P^2)$ は

$$P = \{(x^1, x^2) \in M_{\mathbb{R}} \mid 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, 0 \leq x^1 + x^2 \leq 1\}.$$

となり、これをモーメント多面体と呼ぶ(図 1)。

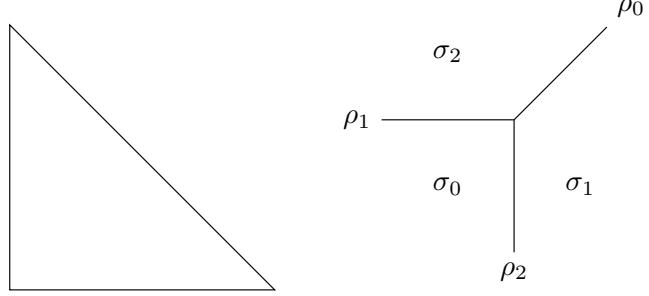


図 1 モーメント多面体 P と $\mathbb{C}P^2$ に対応する扇

モーメント写像はモーメント多面体の内部 $B := \text{Int}(P)$ 上ではトーラス束となる。そこで、 $\mathcal{U} := \check{\mu}^{-1}(B)$ とすると、これは $TN_{\mathbb{R}}/N$ と同一視することができ、アファイン構造が $(u, v) = (e^{\xi_1 + iy_1}, e^{\xi_2 + iy_2})$ により定まる。 $\mathcal{U} \cong TN_{\mathbb{R}}/N$ 上で Fubini-Study 形式 ω_{FS} は

$$\omega_{FS} = 2 \frac{e^{2\xi_1}(1 + e^{2\xi_2})d\xi_1 \wedge dy_1 - e^{2\xi_1}e^{2\xi_2}d\xi_1 \wedge dy_2 - e^{2\xi_1}e^{2\xi_2}d\xi_2 \wedge dy_1 + e^{2\xi_2}(1 + e^{2\xi_1})d\xi_2 \wedge dy_2}{(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})^2}$$

と表されるので、 $N_{\mathbb{R}}$ 上に次のような計量 $\{g^{ij}\}$ が誘導される。

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2e^{2\xi_1}(1 + e^{2\xi_2})}{(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})^2} & \frac{-2e^{2\xi_1}e^{2\xi_2}}{(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})^2} \\ \frac{-2e^{2\xi_1}e^{2\xi_2}}{(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})^2} & \frac{2e^{2\xi_2}(1 + e^{2\xi_1})}{(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})^2} \end{pmatrix}.$$

自然な射影を $\text{pr}_{\xi} : TN_{\mathbb{R}}/N \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ と書くことにし、各ファイバーを計量 $\{g^{ij}\}$ に関して双対を取ったものを $p_{N_{\mathbb{R}}} : T^*N_{\mathbb{R}}/M \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ と書くこととする。ここで、 $N_{\mathbb{R}}$ 上の関数として $\psi := \frac{1}{2} \log(1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2})$ を考えると、 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = g^{ij}$ となるので、ルジャンドル変換 $d\psi : N_{\mathbb{R}} \rightarrow B$ が

$$d\psi(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) = \left(\frac{e^{2\xi_1}}{1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2}}, \frac{e^{2\xi_2}}{1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2}} \right) =: (x^1, x^2).$$

で与えられる。このとき、モーメント写像は $\check{\mu} = d\psi \circ \text{pr}_{\xi}$ となる。

$$\begin{array}{ccccc} N_{\mathbb{R}} \times (M_{\mathbb{R}}/M) & \xlongequal{\quad} & T^*N_{\mathbb{R}}/M & \xlongequal{\quad} & \mathcal{U} \\ & \searrow p_{N_{\mathbb{R}}} & \downarrow \text{pr}_{\xi} & \swarrow \check{\mu}|_{\mathcal{U}} & \\ & & N_{\mathbb{R}} & \xrightarrow[d\psi]{\cong} & B \end{array}$$

$T^*N_{\mathbb{R}}/M$ には自然なシンプレクティック形式 $\omega = d\xi_1 \wedge dy^1 + d\xi_2 \wedge dy^2$ が定まる。ここで (y^1, y^2) は (y_1, y_2) の双対座標である。このシンプレクティック多様体 $(T^*N_{\mathbb{R}}/M, \omega)$ を \mathcal{U} の SYZ ミラーと呼ぶことにする ([LYZ00, Cha09, FK21])。また、これ以降 B と $N_{\mathbb{R}}$ を同一視することとし、 $\pi := d\psi \circ p_{N_{\mathbb{R}}}$ とする。

2.2 ラグランジュ多重切断

定義 2.1. [OS24, Definition 4.3] シンプレクティック多様体 $(T^*N_{\mathbb{R}}, \omega)$ に対して、ラグランジュはめ込み^{*1} $\mathbb{L} := (i : \tilde{L} \rightarrow T^*N_{\mathbb{R}})$ が次数 r のラグランジュ多重切断であるとは、合成 $p_{\mathbb{L}} := p_{N_{\mathbb{R}}} \circ i : \tilde{L} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ が次数 r の分岐被覆写像となることをいう。以下、はめ込みの像 $i(\tilde{L})$ も \mathbb{L} と書いたりする。

[OS24]において、トーリック曲面上のトーリックベクトル束に対応するような $T^*N_{\mathbb{R}}$ のラグランジュ多重切断が構成された。この構成は三段階に分かれており、まず分岐点の周りの local model を構成し、次に $N_{\mathbb{R}}$ における無限遠の挙動が制御された部分を構成し、最後にこれらを貼り合わせることでラグランジュ多重切断が構成される。特に、 $N_{\mathbb{R}}$ における無限遠の挙動がトーリックベクトル束の全 Chern 類の情報の大半を持つ（より詳細は [OS24, Sue23] を参照）。ここでは、 $\mathbb{C}P^2$ の正則接束 $T_{\mathbb{C}P^2}$ のミラーとなるラグランジュ多重切断 $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ についてのみ考え、分岐点の周りの local model とモーメント多面体の頂点での挙動についてみていく。

(ξ_1, ξ_2) を $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ の実座標、 (ξ_1, ξ_2, y^1, y^2) を $T^*N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}^2$ の実座標、 $T^*N_{\mathbb{R}}$ の複素座標を $\xi := \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2$, $\eta := y^1 + \sqrt{-1}y^2$ とする。このとき、 $T^*N_{\mathbb{R}}$ の部分多様体 L を次で定める。

$$L := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \xi \in N_{\mathbb{R}}, \bar{\xi} = \eta^2\}.$$

直接計算により、 $\omega|_L = 0$ となることがわかるので、 L はラグランジュ部分多様体となる。これに対して、 $N_{\mathbb{R}}$ 上の極座標 $\xi = re^{\sqrt{-1}\theta}$ を用いると L は次のように表される。

$$L = \left\{ \left(re^{\sqrt{-1}\theta}, \sqrt{r}e^{-\sqrt{-1}\frac{\theta}{2}} \right) \in \mathbb{C}^2 \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

ここで、 $N_{\mathbb{R}}$ 上の関数 $f_L := \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2}\theta$ を考え、 df_L のグラフ

$$\text{graph}(df_L) = \left\{ (\xi, df_L(\xi)) \in \mathbb{C}^2 \mid \xi = re^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{C}, f_L(r, \theta) = \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2}\theta \right\}.$$

を考えると、直接計算により

$$L = \text{graph}(df_L)$$

となることがわかる。ここで、 f_L は 2 倍の関数であり、原点が臨界点であることに注意する。以降では、ブランチカットとして ξ_1 軸の負の部分を取ることにし、 f_L の各分岐を $f_L^{(1)}, f_L^{(2)}$ と書くことにする。次に、 f_L に対する勾配ベクトル場 $\text{grad}(f_L)$ を考えると

$$\text{grad}(f_L) = r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{3\theta}{2} \frac{\partial}{\partial r} - r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{3\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \left(= \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right).$$

となることがわかる^{*2}。この表示より、分岐点に出入りする積分曲線が 3 本あることが分かる ($\theta = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$)。この $L = \text{graph}(df_L)$ が $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ の分岐点の周りの local model である（より詳細は [Fuk05, Sue21] を参照）。

^{*1} はめ込み $i : \tilde{L} \rightarrow T^*N_{\mathbb{R}}$ がラグランジュはめ込みであるとは、 $\dim(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \dim(T^*N_{\mathbb{R}})$ かつ $i^*\omega = 0$ となるもののことである。

^{*2} 埋め込み $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2; z \mapsto (\bar{z}, z^2)$ と考えることで、第 2 成分への射影 $\text{pr}_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, z_2) \mapsto z_2$ に対するラグランジュ多重切断となる。実際 $\text{pr}_2 \circ \iota(z) = z^2$ であるから 2-fold branched covering map となっている。

$N_{\mathbb{R}}$ における無限遠の挙動は、*tropical Lagrangian multi-section* と呼ばれるデータによって制御される。ここでは正確な定義を述べないが、 $N_{\mathbb{R}}$ 上の完備な扇上の multi-valued piecewise linear function φ^{trop} として表される（詳細は [Sue23, Pay09] を参照）。特に、 $T_{\mathbb{C}P^2}$ に対応するようなもの $\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{\text{trop}}$ は図 2 で与えられる。この multi-valued piecewise linear function $\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{\text{trop}}$ を smoothing した

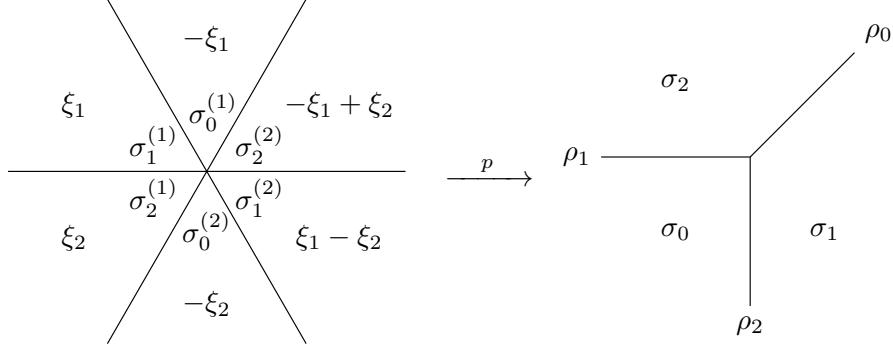


図 2 正則接束 $T_{\mathbb{C}P^2}$ に付随する tropical Lagrangian multi-section $(\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{\text{trop}}, \varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{\text{trop}})$ 。右側が $N_{\mathbb{R}}$ 上の完備な扇である。例えば cone σ_0 上で $\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{\text{trop}}(\xi_1, \xi_2) = -\xi_1$ or $-\xi_2$ ということである。

もの $\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ の外微分のグラフ $\text{graph}(d\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}})$ がラグランジュ多重切断の $N_{\mathbb{R}}$ における無限遠の挙動となる。

local model L と $\text{graph}(d\varphi_{T_{\mathbb{C}P^2}})$ を張り合わせることで構成されるラグランジュ多重切断 $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ に対して、モーメント多面体の各頂点でのファイバー座標を考えると図 3 となる。

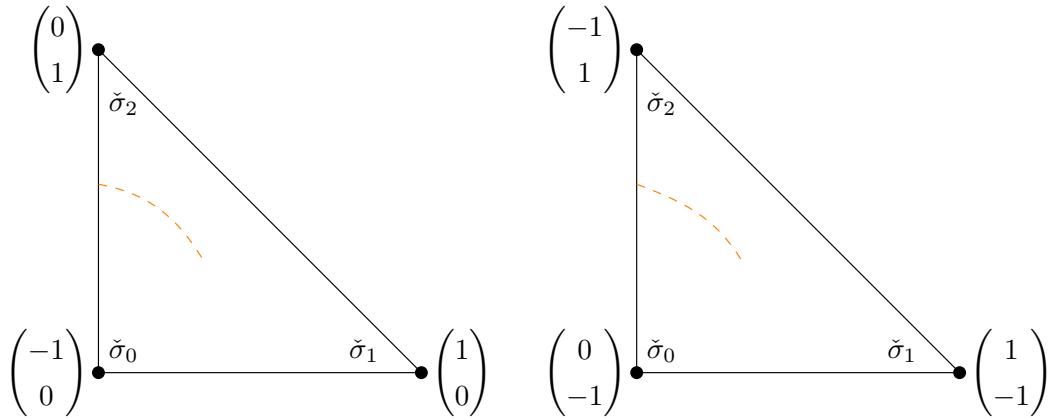


図 3 ラグランジュ多重切断 $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}} = \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{(1)} \cup \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{(2)}$ のモーメント多面体の各頂点でのファイバー座標。オレンジの点線はブランチカットであり、左の図が 1 枚目のシート $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{(1)}$ のファイバー座標であり、右の図が 2 枚目のシート $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}^{(2)}$ のファイバー座標である。

3 モースホモトピー

B をリーマン多様体とする。モースホモトピーの圏 $Mo(B)$ とは、 B 上の滑らかな関数を対象とし、射の空間をモース複体とするような A_{∞} 圏である。すなわち、 $\text{Ob}(Mo(B)) = C^{\infty}(B)$ であり、

$f_1, f_2 \in \text{Ob}(Mo(B))$ に対して射の空間 $Mo(B)(f_1, f_2)$ が

$$Mo(B)(f_1, f_2) := \bigoplus_{p \in \text{Crit}(f_2 - f_1)} \mathbb{C} \cdot p$$

により定義される^{*3}。各臨界点はモース指数により次数付けされ、複体の構造が

$$\partial(p) := \sum_{\substack{q \in \text{Crit}(f_2 - f_1) \\ |q|=|p|+1}} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}_{p,q}} \pm e^{-A(\gamma)} q$$

により定まる。ここで、 $\mathcal{M}_{p,q}$ は、臨界点 p から臨界点 q への勾配ベクトル場 $\text{grad}(f_2 - f_1)$ の積分曲線のモジュライ空間であり、 $A(\gamma)$ は積分曲線 γ に対する重みである。この圏は A_∞ 圈であるから高次の積が存在するがここでは扱わないこととする。

[FO97]において、この圏 $Mo(B)$ は余接束 T^*B のラグランジュ切断^{*4}からなる深谷圏 $Fuk(T^*B)$ と A_∞ 圈として擬同値となることが知られている。点 $p \in B$ が関数 $f_2 - f_1$ の非退化な臨界点であるということは、 $df_1(p) = df_2(p)$ であるから、2つのラグランジュ切断 $\text{graph}(df_1)$ と $\text{graph}(df_2)$ が点 $(p, df_i(p)) \in T^*B$ で横断的に交わることと同値である。そのため、 $Mo(B)$ と $Fuk(T^*B)$ の対応は、関数 f_i に対してその外微分のグラフ $L_i := \text{graph}(df_i)$ が対応し、 $f_2 - f_1$ の臨界点には $L_1 \cap L_2$ が対応する^{*5}。[KS01]において、このような深谷圏とモースホモトピーの圏の対応をもとにして、トーラス束の場合に拡張しホモロジー的ミラー対称性が議論された。さらに、[FK21]において、底空間が境界付きの場合に拡張された^{*6}。以上をもとに、 $T^*N_{\mathbb{R}}$ のラグランジュ多重切断を用いた $Mo(P)$ の拡張 $Mo^{\text{mult}}(P)$ を提案する。

$Mo^{\text{mult}}(P)$ の対象を [OS24] で構成された $T^*N_{\mathbb{R}}$ のラグランジュ多重切断 \mathbb{L} とし、各シートを $\mathbb{L}^{(i)}$ と書くことにする。すなわち $\mathbb{L} = \cup_i \mathbb{L}^{(i)}$ である^{*7}。2つのラグランジュ多重切断 $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ がそれぞれの ramification locus を避けて横断的に交わるとき、射の空間を

$$Mo^{\text{mult}}(P)(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) := \bigoplus_{p \in \pi(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)} \mathbb{C} \cdot p = \bigoplus_{p \in \pi(\mathbb{L}_1^{(i)} \cap \mathbb{L}_2^{(j)})} \mathbb{C} \cdot p$$

と定義する。 $\mathbb{L}_1^{(i)} = \text{graph}(df_1^{(i)})$, $\mathbb{L}_2^{(j)} = \text{graph}(df_2^{(j)})$ であるから、 $p \in \pi(\mathbb{L}_1^{(i)} \cap \mathbb{L}_2^{(j)}) = P$ に対して、次数が $f_2^{(j)} - f_1^{(i)}$ のモース指数として定義できる。複体の構造の定義も勾配ベクトル場

^{*3} 「 $f_2 - f_1$ が Morse 関数である」という仮定を課していることに注意する。また、「 $f_2 - f_1$ の任意の臨界点 p, q に対して、勾配ベクトル場 $\text{grad}(f_2 - f_1)$ に対する安定多様体 $W^s(p)$ と不安定多様体 $W^u(q)$ が横断的に交わる」という条件 (Morse-Smale 条件) も課していることに注意する (より詳細は [FO97] を参照)。

^{*4} 余接束の切断 $s : B \rightarrow T^*B$ がラグランジュ切断であるとは、切断のグラフ $\text{graph}(s)$ がラグランジュ部分多様体となることであり、ある関数 $f \in C^\infty(B)$ が存在して $s = df$ となることと同値である。

^{*5} 深谷圏における射の空間は、ラグランジュ部分多様体の交叉に対するフレーコホモロジーとして定義される。これは、2つのラグランジュ部分多様体 L_1, L_2 に対して、フレーコホモロジーは $L_1 \cap L_2$ により張られるベクトル空間であって、擬正則円盤の数え上げにより複体の構造が入る。

^{*6} トーリック多様に対しても、モーメント写像に対して SYZ 構成を適用してミラー多様体を考える。このとき、モーメント多面体の境界を除いて構成するので、ミラー多様体自体はその分の情報が足りていない。その代わりに、考える圏に対して境界に対する条件を課すことでその情報を拾い上げている。今の場合、モーメント多面体 P とその内部 $B = \text{Int}(P) \cong N_{\mathbb{R}}$ に対して、トーラス束に拡張した後の $Mo(B)$ に境界条件を課したもののが $Mo(P)$ となる。

^{*7} 分岐点を除けば、局所的にはラグランジュ切断の有限個の組とみなすことができる。すなわち、各 $\mathbb{L}^{(i)}$ がラグランジュ切断でありこれらに関数 $f^{(i)}$ が対応するので、この意味で $Mo^{\text{mult}}(P)$ の対象は多価関数であり、multi-valued Morse homotopy としている。

$\text{grad}(f_2^{(j)} - f_1^{(i)})$ の積分曲線を数え上げることで定義できると期待できるが、関数の多価性（特に分岐点から出入りする積分曲線）があるため一般には非自明である。また、より一般に、高次の積も定義できると期待でき、次の予想が考えられる。

予想 3.1. $Mo^{\text{mult}}(P)$ は A_∞ 圈となる。

次節において、零切断 L_0 から $\mathbb{C}P^2$ の正則接束のミラーとなるラグランジュ多重切断 $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ への射の空間の計算を行い、ミラー対称性との関係を考察する。

4 主結果

まずは、 $\mathbb{C}P^2$ 上の正則ベクトル束からなる dg 圈 $HV(\mathbb{C}P^2)$ を考える。射の空間をベクトル束写像の空間に $\mathbb{C}P^2$ 上の反正則微分形式の空間をテンソル積したものとして定義する。このとき、正則ベクトル束の接続の $(0, 1)$ -パートを用いることで dg 圈を定めることができる。この圏において、階数 1 の自明束 \mathcal{O} から正則接束 $T_{\mathbb{C}P^2}$ への射の空間 $HV(\mathbb{C}P^2)(\mathcal{O}, T_{\mathbb{C}P^2})$ を考えると、0 次のコホモロジーが $T_{\mathbb{C}P^2}$ の大域切断の空間 $\Gamma(\mathbb{C}P^2, T_{\mathbb{C}P^2})$ となる。すなわち

$$H^k(HV(\mathbb{C}P^2))(\mathcal{O}, T_{\mathbb{C}P^2}) \cong \begin{cases} \Gamma(\mathbb{C}P^2, T_{\mathbb{C}P^2}) & (k = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\dim H^0(HV(\mathbb{C}P^2))(\mathcal{O}, T_{\mathbb{C}P^2}) = \dim \Gamma(\mathbb{C}P^2, T_{\mathbb{C}P^2}) = 8,$$

である。ここで、 $\mathbb{C}P^2$ はトーリック多様体でもあり、トーリック多様体の接束はトーリックベクトル束であることから、大域切断の空間の生成元を有限個の多面体の格子点を用いて表すことができる。これは、トーリック多様体上の直線束の大域切断を多面体の格子点を用いて表すこととの拡張である（より詳しくは [CLS11, DJS14] を参照）。今の場合、正則接束 $T_{\mathbb{C}P^2}$ に対応する多面体たちは図 4 となり、大域切断の空間の生成元は各格子点に対応して次のように表すことができる。

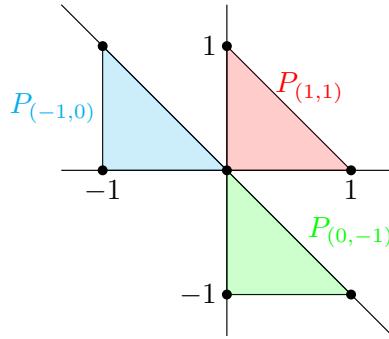


図 4 The parliament of polytopes associated to $T_{\mathbb{C}P^2}$.

$$\begin{aligned} & (-1, 0) \otimes \chi^{-(1, 0)}, & (1, 1) \otimes \chi^{-(0, 1)}, \\ & (-1, 0) \otimes \chi^{-(1, 0)}, & (-1, 0) \otimes \chi^{-(0, 0)}, & (1, 1) \otimes \chi^{-(0, 0)}, & (1, 1) \otimes \chi^{-(1, 0)}, \\ & & & (0, -1) \otimes \chi^{-(0, 0)}, & & & (1) \\ & & & (0, -1) \otimes \chi^{-(0, -1)}, & (0, -1) \otimes \chi^{-(1, -1)}. & & \end{aligned}$$

ここで、 $(0, -1) \otimes \chi^{(0,0)} + (1, 1) \otimes \chi^{(0,0)} + (-1, 0) \otimes \chi^{(0,0)} = 0$ であることに注意すると、確かに $\dim \Gamma(\mathbb{C}P^2, T_{\mathbb{C}P^2}) = 8$ となっていることがわかる。

一方、階数 1 の自明束のミラーは $T^*N_{\mathbb{R}}/M$ の零切断 L_0 であり、正則接束のミラーは 2.2 節で考えた $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ である。これらに対して射の空間 $Mo^{\text{mult}}(P)(L_0, \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}})$ を考える。 $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ の $N_{\mathbb{R}}$ における無限遠での挙動（すなわちモーメント多面体の境界での挙動）より、交叉 $L_0 \cap \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ のモーメント多面体への射影は図 5 のとおりである。これらに対して、 $v_{(0,0)}^b$ の次数が 1 であり、それ以外は次数 0 である^{*8}。点 $v_{(0,0)}^b$ は $\mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ の分岐点であり、 $Mo^{\text{mult}}(P)$ はこのような分岐点での交叉を避け

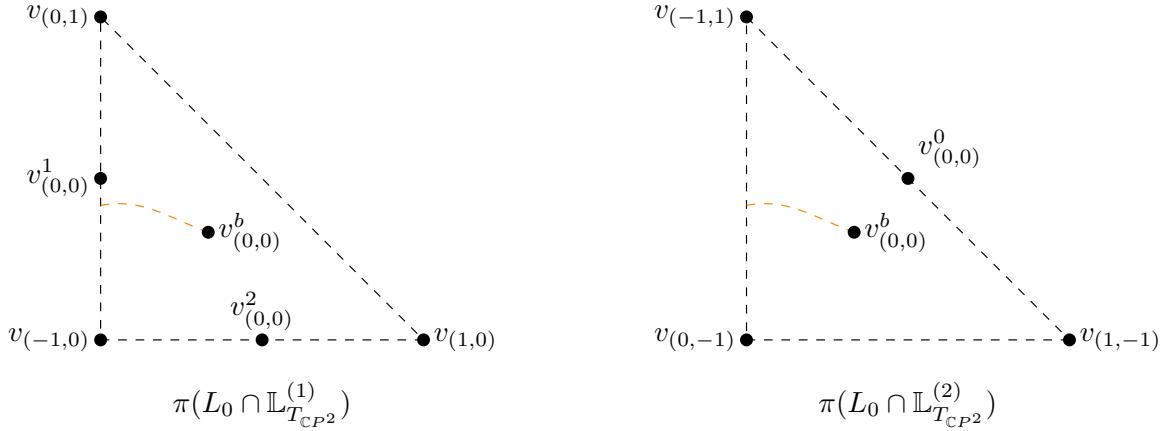


図 5 The projection of the intersection $L_0 \cap \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}$ to the moment polytope.

て定義しているため、適切に摂動させる必要がある。しかし、今の場合は射の空間に分岐点を次数 1 の元として形式的に付け加え勾配ベクトル場の積分曲線を考察することでうまく計算することができる。3 つの臨界点 $v_{(0,0)}^0, v_{(0,0)}^1, v_{(0,0)}^2$ と分岐点 $v_{(0,0)}^b$ に付随する勾配ベクトル場の積分曲線は図 6 のようになる ([Sue24] も参照)。

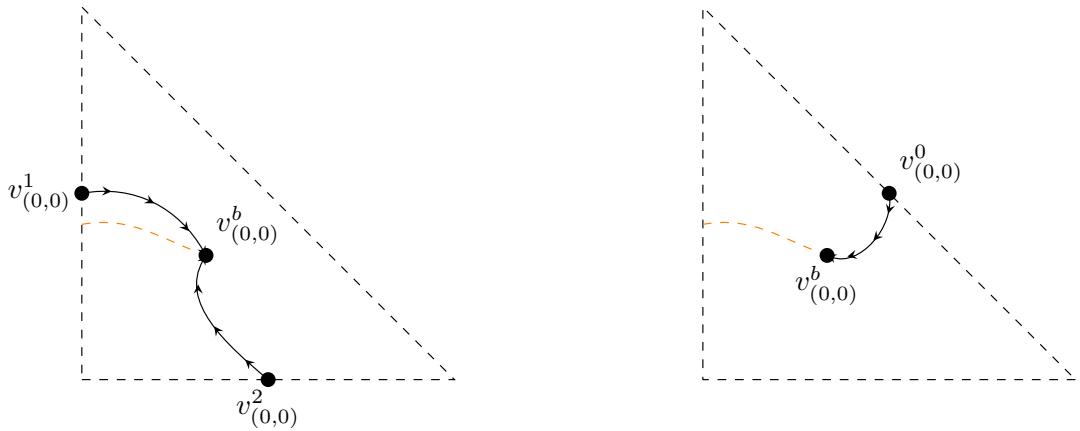


図 6 The gradient trajectories starting from $v_{(0,0)}$ and ending to $v_{(0,0)}^b$.

^{*8} 臨界点 $v_{(0,0)}^b$ に対しては、モース指数を定義することはできない。今の場合、ラグランジュ部分多様体の交叉に対して定まるマスロフ指数が 1 となることから、 $v_{(0,0)}^b$ の次数を形式的に 1 としている。

これにより、ある定数 $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を用いて

$$\mathfrak{m}_1(v_{(0,0)}^0) = e^{-c_0} v_{(0,0)}^b, \quad \mathfrak{m}_1(v_{(0,0)}^1) = e^{-c_1} v_{(0,0)}^b, \quad \mathfrak{m}_1(v_{(0,0)}^2) = e^{-c_2} v_{(0,0)}^b,$$

となり、他の $v_{(i,j)}$ に対しては $\mathfrak{m}_1(v_{(i,j)}) = 0$ となるので

$$H^k(Mo^{\text{mult}}(P))(L_0, \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{(i,j) \in PP(T_{\mathbb{C}P^2}) \setminus \{(0,0)\}} \mathbb{C} \cdot v_{(i,j)} \oplus \mathbb{C} \cdot (e^{c_1} v_{(0,0)}^1 - e^{c_0} v_{(0,0)}^0) \oplus \mathbb{C} \cdot (e^{c_2} v_{(0,0)}^2 - e^{c_0} v_{(0,0)}^0) & (k=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases},$$

が得られる。ここで $PP(T_{\mathbb{C}P^2})$ は図 4 の多面体に含まれる格子点の集合である。これにより、以下のような $T_{\mathbb{C}P^2}$ の大域切断 (1) との対応を得ることができる。

$$\begin{aligned} v_{(-1,0)} &\leftrightarrow (-1,0) \otimes \chi^{(-1,0)}, & v_{(0,-1)} &\leftrightarrow (0,-1) \otimes \chi^{-(0,-1)}, \\ v_{(1,0)} &\leftrightarrow (1,1) \otimes \chi^{-(1,0)}, & v_{(1,-1)} &\leftrightarrow (0,-1) \otimes \chi^{-(1,-1)}, \\ v_{(0,-1)} &\leftrightarrow (0,-1) \otimes \chi^{-(0,-1)}, & v_{(-1,1)} &\leftrightarrow (-1,0) \otimes \chi^{(-1,1)}, \\ -e^{c_0} v_{(0,0)}^0 &\leftrightarrow (1,1) \otimes \chi^{-(0,0)}, & e^{c_1} v_{(0,0)}^1 &\leftrightarrow (-1,0) \otimes \chi^{-(0,0)}, & e^{c_2} v_{(0,0)}^2 &\leftrightarrow (0,-1) \otimes \chi^{-(0,0)}. \end{aligned} \tag{2}$$

まとめると、次の結果を得る。

定理 4.1. コホモロジーの間の同型

$$H^k(Mo^{\text{mult}}(P))(L_0, \mathbb{L}_{T_{\mathbb{C}P^2}}) \cong H^k(HV(\mathbb{C}P^2))(\mathcal{O}, T_{\mathbb{C}P^2}).$$

が存在する。

この結果の一般化として次の予想が期待される。

予想 4.2. A_∞ 圈としての擬同値

$$Mo^{\text{mult}}(P) \simeq HV(\mathbb{C}P^2)$$

が存在する。

参考文献

- [Cha09] K. Chan. *Holomorphic line bundles on projective toric manifolds from Lagrangian sections of their mirrors by SYZ transformations*. International Mathematics Research Notices. 2009.24 (2009), 4686-4708.
- [CLS11] D. Cox, J. Little, and H. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [DJS14] S. Di Rocco, K. Jabbusch, and G. G. Smith. *Toric vector bundles and parliaments of polytopes*. Transactions of the American Mathematical Society 370.11 (2018): 7715-7741.

- [Fuk05] K. Fukaya. *Multivalued Morse theory, asymptotic analysis and mirror symmetry.* Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 205–278.
- [FO97] K. Fukaya and Y.-G. Oh. *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy.* Asian J. Math., 1:96–180, 1997.
- [FK21] M. Futaki and H. Kajihara, *Homological mirror symmetry of $\mathbb{C}P^n$ and their products via Morse homotopy.* Journal of Mathematical Physics, 62:3, 032307, 2021.
- [Kon95] M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [KS01] M. Kontsevich and Y. Soibelman. *Homological mirror symmetry and torus fibrations.* Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.
- [LYZ00] N.C. Leung, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *From special Lagrangian to hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform.* Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000), no. 6, 1319–1341.
- [Nak24a] H. Nakanishi. *Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy.* Journal of Mathematical Physics, 65:5, 053501, 2024.
- [Nak24b] H. Nakanishi. *SYZ mirror of Hirzebruch surfaces \mathbb{F}_k and Morse homotopy.* Journal of Geometry and Physics, 203, 105255, 2024.
- [OS24] Y.-G. Oh and Y.-H. Suen. *Lagrangian multi-sections and their toric equivariant mirror.* Advances in Mathematics 441 (2024): 109545.
- [Pay09] Sam Payne. *Toric vector bundles, branched covers of fans, and the resolution property.* Journal of Algebraic Geometry 18.1 (2009): 1-36.
- [Sue21] Y.-H. Suen. *Reconstruction of $T_{\mathbb{P}^2}$ via tropical Lagrangian multi-section.* New York Journal of Mathematics 27 (2021): 1096–1114.
- [Sue23] Y.-H. Suen. *Tropical Lagrangian multisections and toric vector bundles.* Pacific Journal of Mathematics 325.2 (2023): 299-330.
- [Sue24] Y.-H. Suen. *Toric vector bundles, non-abelianization, and spectral networks.* International Mathematics Research Notices 2024.24 (2024): 14576-14599.
- [SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *Mirror symmetry is T-duality.* Nucl. Phys. B, (1996), 479:243–259.